Ce cours s'articule autour de questions de noyaux de la chaleur pour des opérateurs de diffusion elliptiques ainsi que leurs applications.
On considère un opérateur elliptiques $L = -div(A(x)\nabla)$ sur un domaine Ω et soumis à des conditions au bord de type Dirichlet ou Neumann ou mixtes et notons (e^{-tL}) son semi-groupe associé. Celui-ci est donné par un noyau $p(t,x,y)$ au sens

$$e^{-tL}f(x) = \int_\Omega p(t,x,y)f(y)dy.$$

On s'intéresse à des estimations gaussiènnes de son noyau de la chaleur, c'est-à-dire

$$|p(t,x,y)| \leq Ct^{-d/2}\exp[-c\frac{|x-y|^2}{t}].$$

Pour montrer de telles estimations, nous serons amené à faire appel à divers outils tels que: semi-groupes sous markoviens, inégalités fonctionnelles de type Sobolev, Gagliardo-Nirenberg ou Nash, techniques d'interpolation ou d'extrapolation,... Ces outils seront introduit dans un cadre général et nous montrons leur lien avec des propriétés de régularité $L^2 - L^\infty$ du semi-groupe. Plusieurs applications de ces estimations gaussiènnes seront étudiées, notamment aux opérateurs d'intégrales singulières, les multiplicateurs spectraux, transformée de Riesz,...